SIMILITUDINE GEOMETRICA DEI TRASFORMATORI

Lo studio della similitudine geometrica e le conclusioni che da essa si possono trarre permettono di fissare i criteri di progettazione delle macchine elettriche.
In questo caso viene trattata la similitudine geometrica fra trasformatori.

1. DIMENSIONI LINEARI, SUPERFICI, VOLUMI

Si considerino due trasformatori simili negli elementi geometrici, tali cioè che l'uno riproduca in scala "m" volte maggiore l'altro (m = rapporto fra le dimensioni lineari dei due trasformatori).

Tra gli elementi geometrici si hanno pertanto le seguenti relazioni:

- Dimensioni lineari

$$\boxed{L_2 = m \cdot L_1}$$

- Superfici

$$\boxed{S_2 = m^2 \cdot S_1}$$

- Volumi

$$\boxed{V_2 = m^3 \cdot V_1}$$

I due trasformatori, costruiti con materiali di uguali caratteristiche, abbiano inoltre le stesse "utilizzazioni" dei materiali attivi: siano cioè identiche l'induzione B_M nel ferro del nucleo e la densità di corrente δ nel rame degli avvolgimenti.

2. POTENZE, PESI, PERDITE

Partendo da queste premesse, per i due trasformatori si possono allora ricavare le relazioni riguardanti:

- **Le potenze**
- **I pesi**
- **Le perdite**

❑ Relazione tra le potenze

La potenza è proporzionale al prodotto della tensione per la corrente:

$$P = K_p \cdot V \cdot I$$

Ricordando che:

$$V = 4{,}44 \cdot f \cdot N \cdot B_M \cdot S_{fe} = K_v \cdot S_{fe} \qquad (K_v = 4{,}44 \cdot f \cdot N \cdot B_M)$$

$$I = \delta \cdot S_{cu} = K_i \cdot S_{cu} \qquad (K_i = \delta)$$

dove:

- S_{fe} = sezione del ferro
- S_{cu} = sezione del rame

si ha:

$$P = K_p \cdot K_v \cdot S_{fe} \cdot K_i \cdot S_{cu} = K \cdot S_{fe} \cdot S_{cu} \qquad (K = K_p \cdot K_v \cdot K_i)$$

cioè <u>la potenza è proporzionale al prodotto delle sezioni del ferro e del rame.</u>

Le potenze dei due trasformatori valgono:

1) $P_1 = K \cdot S_{fe1} \cdot S_{cu1}$

2) $P_2 = K \cdot S_{fe2} \cdot S_{cu2} = K \cdot m^2 \cdot S_{fe1} \cdot m^2 \cdot S_{cu1} = m^4 \cdot K \cdot S_{fe1} \cdot S_{cu1}$

Pertanto:

$$\boxed{P_2 = m^4 \cdot P_1}$$

cioè: <u>Le potenze variano secondo la quarta potenza del rapporto fra le dimensioni lineari.</u>

<u>Esempio</u>

Se $m = 2$, si ha:

$$P_2 = 2^4 \cdot P_1 = 16 \cdot P_1$$

❑ <u>Relazione fra i pesi</u>

I pesi dei materiali attivi sono proporzionali ai volumi. Infatti indicando con g_{sp} il peso specifico e con V il volume dei materiali attivi, si ha:

$$G = g_{sp} \cdot V$$

I pesi dei due trasformatori valgono:

1) $G_1 = g_{sp} \cdot V_1$

2) $G_2 = g_{sp} \cdot V_2 = g_{sp} \cdot m^3 \cdot V_1$

pertanto:

$$\boxed{G_2 = m^3 \cdot G_1}$$

cioè: I pesi variano secondo la terza potenza del rapporto fra le dimensioni lineari

Esempio

Se m = 2 , si ha:

$$G_2 = 2^3 \cdot G_1 = 8 \cdot G_1$$

❑ **Relazione fra le perdite**

Le perdite sono proporzionali ai pesi dei materiali attivi. Si ha infatti per le perdite nel ferro e nel rame:

$$W_{fe} = w_s \cdot B_M{}^2 \cdot G_{fe}$$

$$W_{cu} = 2{,}4 \cdot \delta^2 \cdot G_{cu}$$

Pertanto si può scrivere:

$$W = W_{fe} + W_{cu} = K \cdot (G_{fe} + G_{cu}) = K \cdot G$$

Le perdite nei due trasformatori valgono:

1) $W_1 = K \cdot G_1$

2) $W_2 = K \cdot G_2 = K \cdot m^3 \cdot G_1$

E quindi:

$$\boxed{W_2 = m^3 \cdot W_1}$$

cioè: Le perdite variano secondo la terza potenza del rapporto fra le dimensioni lineari.

Esempio

Se m = 2 , si ha

$$W_2 = 2^3 \cdot W_1 = 8 \cdot W_1$$

3. PESI PER UNITA' DI POTENZA, RENDIMENTI, CORRENTI A VUOTO PERCENTUALI, SOVRATEMPERATURE

In base a quanto visto in precedenza si possono ricavare le relazioni fra alcuni parametri caratteristici dei trasformatori, e in particolare:

- **Relazioni fra i pesi per unità di potenza (pesi specifici)**
- **Relazioni fra i rendimenti**
- **Relazioni fra le correnti a vuoto percentuali**
- **Relazioni fra le sovratemperature**

❑ <u>Pesi per unità di potenza (pesi specifici)</u>

Il peso per unità di potenza (peso specifico) è dato dal rapporto fra il peso del trasformatore e la sua potenza, cioè:

$$g = \frac{G}{P}$$

La conclusione che si trae dalla relazione precedente à che:

<u>Siccome il peso G aumenta meno della potenza P, il peso per unità di potenza (Kg/KVA) diminuisce al crescere della potenza.</u>

Infatti se il peso specifico del primo trasformatore vale:

$$g_1 = \frac{G_1}{P_1}$$

per il secondo si ha:

$$g_2 = \frac{G_2}{P_2} = \frac{m^3 \cdot G_1}{m^4 \cdot P_1} = \frac{1}{m} \cdot \frac{G_1}{P_1} = \frac{1}{m} \cdot g_1$$

<u>Esempio</u>

Per $m = 2$, se per il primo trasformatore si ha, per esempio, $g_1 = 10$ Kg/KVA, per il secondo si ottiene:

$$g_2 = \frac{1}{2} \cdot g_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \quad \text{Kg/KVA}$$

❑ <u>Rendimenti</u>

Il rendimento di un trasformatore vale:

$$\eta = \frac{P}{P + W} = \frac{1}{1 + \frac{W}{P}}$$

Dalla relazione precedente si trae la conclusione che:

<u>Siccome le perdite aumentano meno delle potenze, il rendimento aumenta al crescere della potenza.</u>

Infatti se il rendimento del primo trasformatore vale:

$$\eta_1 = \frac{1}{1 + \frac{W_1}{P_1}}$$

per il secondo si ottiene:

$$\eta_2 = \frac{1}{1+\frac{W_2}{P_2}} = \frac{1}{1+\frac{m^3 \cdot W_1}{m^4 \cdot P_1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{m}\cdot\frac{W_1}{P_1}}$$

Esempio

Supponendo che le perdite del primo trasformatore siano pari al 10 % della potenza nominale ($W_1 = 0{,}1\ P_1$, ossia $W_1/P_1 = 0{,}1$), si ha:

$$\eta_1 = \frac{1}{1+0{,}1} = 0{,}909$$

Per m = 2 , il rendimento del secondo trasformatore vale:

$$\eta_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}1} = 0{,}952$$

❑ **Correnti a vuoto percentuali**

La corrente a vuoto in un trasformatore vale:

$$I_o = \frac{\Phi_M \cdot R}{\sqrt{2}\cdot N}$$

dove il flusso Φ_M nel nucleo, la riluttanza R del circuito magnetico, le spire N valgono rispettivamente:

$$\Phi_M = B_M \cdot S_{fe}$$

$$R = \frac{l_{fe}}{\mu \cdot S_{fe}}$$

$$N = \frac{V}{4{,}44 \cdot f \cdot B_M \cdot S_{fe}}$$

Sostituendo si ottiene:

$$I_o = \frac{B_M \cdot S_{fe} \cdot \frac{l_{fe}}{\mu \cdot S_{fe}}}{\sqrt{2}\cdot \frac{V}{4{,}44 \cdot f \cdot B_M \cdot S_{fe}}}$$

Tenendo presente che $S_{fe} \cdot l_{fe} = Vol_{fe}$ (volume del ferro), si ha:

$$I_o = \frac{4{,}44 \cdot f \cdot B_M^{\,2}}{\sqrt{2}\cdot \mu \cdot V} \cdot Vol_{fe}$$

Si vede intanto che la corrente a vuoto è proporzionale al volume del ferro.

Ricordando, poi, che il valore percentuale della corrente a vuoto vale:

$$I_o\% = \frac{I_o}{I} \cdot 100$$

e che:

$$I = \frac{P}{K_p \cdot V}$$

si ottiene:

$$I_o\% = 100 \cdot \frac{\dfrac{4{,}44 \cdot f \cdot B_M{}^2}{\sqrt{2} \cdot \mu \cdot V} \cdot Vol_{fe}}{\dfrac{P}{K_p \cdot V}} = 100 \cdot \frac{4{,}44 \cdot K_p \cdot f \cdot B_M{}^2}{\sqrt{2} \cdot \mu \cdot P} \cdot Vol_{fe}$$

cioè:

$$I_o\% = K_o \cdot \frac{Vol_{fe}}{P} \qquad \left(K_o = 100 \cdot \frac{4{,}44 \cdot K_p \cdot f \cdot B_M{}^2}{\sqrt{2} \cdot \mu \cdot P} \cdot Vol_{fe} \right)$$

Dalla relazione precedente si ricava che la corrente a vuoto percentuale è proporzionale al rapporto fra il volume del ferro e la potenza e quindi si può dire che:

<u>Siccome i volumi aumentano meno delle potenze, la corrente a vuoto percentuale diminuisce all'aumentare della potenza.</u>

Infatti se la corrente a vuoto percentuale del primo trasformatore vale:

$$I_o\%_1 = K_o \cdot \frac{Vol_{fe1}}{P_1}$$

per il secondo si ottiene:

$$I_o\%_2 = K_o \cdot \frac{Vol_{fe2}}{P_2} = K_o \cdot \frac{m^3 \cdot Vol_{fe1}}{m^4 \cdot P_1} = \frac{1}{m} \cdot I_o\%_1$$

<u>Esempio</u>

Per $m = 2$, se per il primo trasformatore si ha $I_o\%_1 = 8\%$, per il secondo si ottiene:

$$I_o\%_2 = \frac{1}{2} \cdot I_o\%_1 = \frac{1}{2} \cdot 8\% = 4\%$$

❑ Sovratemperature

La sovratemperatura di un trasformatore può essere determinata con la relazione:

$$\Delta\vartheta = \frac{W}{K \cdot S}$$

La relazione precedente evidenzia che:

Siccome le perdite aumentano più delle superfici, la sovratemperatura (a parità di coefficiente di trasmissione del calore) aumenta al crescere della potenza.

Infatti se la sovratemperatura del primo trasformatore è:

$$\Delta\vartheta_1 = \frac{W_1}{K \cdot S_1}$$

per il secondo si ha:

$$\Delta\vartheta_2 = \frac{W_2}{K \cdot S_2} = \frac{m^3 \cdot W_1}{K \cdot m^2 \cdot S_1} = m \cdot \frac{W_1}{K \cdot S_1} = m \cdot \Delta\vartheta_1$$

Esempio

Supponendo per il primo trasformatore una sovratemperatura $\Delta\theta = 60$ °C , per il secondo, per $m = 2$, si ha:

$$\Delta\vartheta_2 = 2 \cdot 60 = 120 \quad °C$$

CRITERI DI PROGETTAZIONE

Dalla similitudine geometrica si possono trarre le seguenti conclusioni:

1) Al crescere delle potenze, i pesi per unità di potenza (e quindi in definitiva i costi per unità di potenza) diminuiscono, i rendimenti aumentano, le correnti a vuoto percentuali diminuiscono.

2) Al crescere delle potenze, le sovratemperature aumentano.

Le due conclusioni sono evidentemente contrastanti, nel senso che non possono coesistere: mentre infatti quelle del punto 1) sono “positive”, quelle del punto 2) sono viceversa “negative”. In altre parole: mentre per quanto riguarda i pesi per unità di potenza, i rendimenti e le correnti a vuoto è conveniente costruire trasformatori di potenza sempre più grande, per quanto riguarda la sovratemperatura è vero invece il contrario: non si possono costruire trasformatori di potenza sempre maggiore perché le sovratemperature raggiungerebbero valori troppo elevati.

Il contrasto fra questi due punti non è però, come potrebbe sembrare a prima vista, insormontabile. Esso può essere superato adottando opportuni "criteri di progettazione", che consistono nello scegliere i parametri costruttivi "giusti": utilizzazioni dei materiali attivi (induzione nel ferro e densità di corrente nel rame) e sistema di raffreddamento

Siccome il punto vincolante è la sovratemperatura (nel senso che non può superare determinati limiti), è da questa che bisogna partire per trovare i valori più convenienti di tali parametri costruttivi.

Il problema fondamentale della progettazione dei trasformatori (così come, del resto, di tutte la macchine elettriche) è quindi il **problema termico**: esso consiste nel trovare il giusto equilibrio fra il calore prodotto dalle perdite e il calore ceduto all'ambiente attraverso le superfici esterne del trasformatore.

Risolvere questo problema significa riuscire a fare in modo che, qualunque sia la potenza del trasformatore, la sua sovratemperatura a regime (quando tutto il calore prodotto viene ceduto all'ambiente) non oltrepassi i limiti massimi consentiti.

La soluzione può essere trovata partendo dalla relazione che lega la sovratemperatura $\Delta\vartheta$ alle perdite W, alle superfici di scambio del calore S, al sistema di raffreddamento (attraverso il coefficiente di trasmissione del calore K):

$$\Delta\vartheta = \frac{W}{K \cdot S}$$

Se si vuole che, al crescere delle potenze, le sovratemperature non crescano secondo la legge vista in precedenza (cioè proporzionalmente al parametro m) ma viceversa rimangano costanti, occorre che rimanga costante il secondo termine della relazione precedente.

Per ottenere ciò si può operare in diversi modi: o intervenire sulle perdite W, o sulle superfici di dispersione del calore S, o sul coefficiente globale di trasmissione del calore K, o anche, eventualmente, su più di uno o su tutti questi elementi contemporaneamente.

1) Intervento sulle perdite

A parità di K e di S, sia quelle nel ferro che quelle nel rame devono aumentare, al crescere delle potenze, non più secondo m^3, ma secondo m^2.

Ciò si può ottenere:

- per le perdite nel ferro, adottando, all'aumentare delle potenze, lamierini con cifra di perdita sempre più bassa (non viene normalmente seguita la via di diminuire l'induzione in quanto ciò comporterebbe un aumento della sezione e quindi del peso del ferro).

- per le perdite nel rame, adottando densità di correnti sempre più basse all'aumentare delle potenze.

2) Intervento sulle superfici di dispersione del calore

A parità di W e di K, esse devono aumentare, al crescere delle potenze, non più secondo m^2, ma secondo m^3.

Ciò si può ottenere:

- per i trasformatori in olio, aumentando le superfici del cassone, passando, al crescere delle potenze, da cassoni a pareti lisce a cassoni a pareti ondulate, con tubi, con radiatori;

- per i trasformatori a secco, creando canali di raffreddamento fra primario e secondario e fra uno strato e l'altro degli avvolgimenti (è intuibile come per questi trasformatori l'intervento sulle superfici non sia praticabile oltre certi limiti, ed è anche per questo che essi non possono raggiungere potenze eccessivamente elevate).

3) **Intervento sul coefficiente globale di trasmissione del calore**

A parità di W e di S , esso, al crescere delle potenze, non deve rimanere costante ma crescere secondo m.
Ciò si può ottenere adottando sistemi di raffreddamento sempre più energici, passando, all'aumentare delle potenze, dalla circolazione naturale dei fluidi refrigeranti alla circolazione forzata degli stessi, e quindi al loro raffreddamento mediante ventilatori e scambiatori di calore ad acqua.

ESEMPIO

La similitudine geometrica ha un riscontro pratico nella costruzione dei trasformatori. L'esempio che verrà illustrato in seguito ne è una dimostrazione.

Si consideri una serie di trasformatori di distribuzione MT/BT esistenti in commercio. Le caratteristiche di tali trasformatori sono riportate nella tab.1 (il rendimento si riferisce al funzionamento a pieno carico con $\cos\varphi = 1$).

Tab.1 – Dati relativi ad una serie di trasformatori commerciali

N.	P_N (KVA)	W_o (W)	W_{cc} (W)	I_o (%)	η
1	100	390	1850	2,9	0,9781
2	160	550	2550	2,5	0,9810
3	250	780	3700	2,2	0,9824
4	400	1170	5600	2,0	0,9834
5	630	1600	7800	1,9	0,9853
6	1000	2200	11000	1,8	0,9870

Si vuole ora vedere quali analoghi valori si otterrebbero se venissero applicate le relazioni della similitudine geometrica precedentemente viste. In altre parole, assumendo come dati di partenza quelli relativi al primo trasformatore, si calcoleranno quelli degli altri mediante la similitudine geometrica. I dati così ottenuti verranno confrontati con quelli "reali" della tab.1.

In questo caso il dato di partenza sono le potenze dei trasformatori (e non il rapporto "m" tra le dimensioni lineari). I valori di tali potenze si succedono secondo un parametro ben definito, che, in questo caso, è la *ragione* "R5" della serie di Renard. La ragione della serie R5 vale:

$$\alpha = \sqrt[5]{10} \cong 1{,}585$$

Con tale ragione per passare da una potenza a quella successiva si applica la relazione:

$$P_{n+1} = \alpha \cdot P_n$$

Partendo dalla potenza del primo trasformatore (uguale a 100) quelle successive valgono:

100 - 158 - 251 - 398 - 631 - 1000

che arrotondate diventano appunto quelle riportate nella tab.1.

Mediante le relazioni della similitudine geometrica, si calcolano ora gli stessi dati riportati nella tab.1. Le relazioni da utilizzare per il generico trasformatore "n" sono:

- Perdite

$$W_{n+1} = m^3 \cdot W_n$$

- Corrente a vuoto percentuale

$$I_{o,n+1} = \frac{I_{o,n}}{m}$$

- Rendimento

$$\eta_n = \frac{1}{1 + \frac{W_{fe,n} + W_{cu,n}}{P_{N,n}}}$$

Per applicare tali relazioni occorre conoscere il parametro "m". Per calcolarlo si può agire nel seguente modo. La relazione fra le potenze secondo la similitudine geometrica è:

$$P_{n+1} = m^4 \cdot P_n$$

E ricordando l'analoga relazione fra le potenze precedentemente vista, si ha

$m^4 = \alpha$ da cui $m = \sqrt[4]{\alpha}$

e quindi:

$$m = \sqrt[4]{\sqrt[5]{10}} = \sqrt[20]{10} = 1{,}122$$

Con tale valore di "m" si ottengono, per esempio per il secondo trasformatore della serie (quello da 160 KVA), i seguenti valori:

$$W_{fe} = 390 \cdot 1{,}122^3 = 551\,\mathrm{W}$$

$$W_{cu} = 1850 \cdot 1{,}122^3 = 2613\,\mathrm{W}$$

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{551 + 2613}{160.000}} = 0{,}9806$$

$$I_0\,\% = \frac{2{,}9}{1{,}122} = 2{,}58\,\%$$

I valori relativi agli altri trasformatori sono riportati nella tab.2.

Tab.2 – Dati relativi ad una serie di trasformatori desunti dalla similitudine geometrica

N.	P_N (KVA)	W_o (W)	W_{cc} (W)	I_o (%)	η
1	100	390	1850	2,9	0,9781
2	160	551	2613	2,58	0,9806
3	250	778	3691	2,30	0,9824
4	400	1099	5214	2,05	0,9845
5	630	1553	7365	1,83	0,9860
6	1000	2193	10403	1,63	0,9876

Come si può vedere tali valori sono praticamente coincidenti con quelli della tab.1.