VALORE PIÙ CONVENIENTE DEL RENDIMENTO

In una macchina elettrica ad un rendimento più elevato corrisponde un minor valore delle perdite e quindi un risparmio nelle spese di esercizio (in quanto minori risultano i costi dovuti alle perdite di energia). Di contro, ad un più alto rendimento corrisponde un aumento del peso e quindi del costo della macchina: infatti per diminuire le perdite occorre diminuire le utilizzazioni dei materiali attivi con conseguente aumento delle sezioni, quindi dei volumi e dei pesi degli stessi.

Gli elementi che bisogna prendere in considerazione nella determinazione del valore più conveniente del rendimento sono pertanto:

- aumento del costo della macchina a seguito di un aumento del rendimento;

- risparmio (guadagno) sul costo annuo delle perdite (dipendente dal costo dell'energia, dalle ore annue di funzionamento e dal "costo" del denaro).

Per una valutazione analitica del problema si indichi con:

- C_M = costo della macchina per un dato rendimento
- C_W = costo annuo delle perdite per un dato rendimento
- h = ore equivalenti annue di funzionamento a pieno carico
- k = costo del KWh
- i% = tasso percentuale annuo d'interesse

Ad un determinato rendimento η, corrisponderà un costo C_M della macchina e un costo annuo C_W delle perdite.

Se il rendimento aumenta, si avrà un diverso costo C'_M della macchina (con $C'_M > C_M$) e un diverso costo annuo delle perdite C'_W (con $C'_W < C_W$).

Indicando con dC_M l'aumento di costo della macchina per effetto di un aumento $d\eta$ del rendimento e con dg la corrispondente diminuzione del costo annuo delle perdite (cioè il guadagno realizzato), si ha:

$$dC_M = C'_M - C_M$$

$$dg = C_W - C'_W$$

Siccome ad un aumento di rendimento corrisponde una diminuzione del costo delle perdite, ne deriva che si avrà convenienza ad aumentare il rendimento fino se il beneficio ottenuto dalla capitalizzazione del guadagno dg dovuto alle minori perdite è maggiore dell'aumento di costo dC_M della macchina, cioè:

$$100 \cdot \frac{dg}{i\%} > dC_M$$

Se viceversa è:

$$100 \cdot \frac{dg}{i\%} < dC_M$$

allora non c'è convenienza ad aumentare il rendimento.

La condizione limite di **optimum** è:

$$100 \cdot \frac{dg}{i\%} = dC_M \qquad (1)$$

cioè quando:

<u>"Il valore capitalizzato del guadagno ad un determinato tasso percentuale d'interesse uguaglia l'incremento del costo di costruzione della macchina".</u>

Per esplicitare la precedente relazione (1) occorre calcolare il guadagno derivante da un aumento del rendimento.

Dalla relazione del rendimento:

$$\eta = \frac{P}{P+W}$$

si ha:

$$W = P \cdot \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)$$

Per un certo rendimento η , il costo dell'energia perduta (che rappresenta una passività annua) vale:

$$C_W = k \cdot h \cdot W$$

cioè:

$$C_W = k \cdot h \cdot P \cdot \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) \qquad (2)$$

Aumentando il rendimento da η a $\eta + d\eta$ diminuiscono le perdite e quindi il costo dell'energia perduta, che vale:

$$C'_W = k \cdot h \cdot P \cdot \left(\frac{1}{\eta + d\eta} - 1 \right)$$

Il guadagno conseguente all'aumento del rendimento risulta pertanto:

$$dg = C_W - C'_W$$

$$dg = k \cdot h \cdot P \cdot \left[\left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) - \left(\frac{1}{\eta + d\eta} - 1 \right) \right]$$

$$dg = k \cdot h \cdot P \cdot \left[\frac{1}{\eta} - 1 - \frac{1}{\eta + d\eta} + 1\right]$$

$$dg = k \cdot h \cdot P \cdot \left[\frac{\eta + d\eta - \eta}{\eta \cdot (\eta + d\eta)}\right]$$

$$dg = k \cdot h \cdot P \cdot \frac{d\eta}{\eta^2 + \eta \cdot d\eta}$$

essendo $\eta \cdot d\eta$ trascurabile rispetto a η^2 ,si ottiene:

$$dg = k \cdot h \cdot P \cdot \frac{d\eta}{\eta^2}$$

Sostituendo nella (1) il valore ora trovato, si ha:

$$100 \cdot \frac{k \cdot h \cdot P}{i\%} \cdot \frac{d\eta}{\eta^2} = dC_M$$

da cui, dividendo primo e secondo membro per $d\eta$, si ha:

$$\frac{dC_M}{d\eta} - 100 \cdot \frac{k \cdot h \cdot P}{i\%} \cdot \frac{1}{\eta^2} = 0 \qquad (3)$$

Il primo termine a primo membro ($\frac{dC_M}{d\eta}$) rappresenta la variazione di costo della macchina al variare del rendimento; il secondo ($100 \cdot \frac{k \cdot h \cdot P}{i\%} \cdot \frac{1}{\eta^2}$), come verrà di seguito dimostrato, rappresenta la variazione del valore capitalizzato del costo delle perdite sempre al variare del rendimento.

Indicando con C^*_W il valore capitalizzato del costo delle perdite, si ha infatti:

$$C^*_W = \frac{C_W}{i\%} \cdot 100$$

e sostituendo a C_W il valore della (2):

$$C^*_W = 100 \cdot \frac{k \cdot h \cdot P}{i\%} \cdot \left(\frac{1}{\eta} - 1\right)$$

derivando quest'ultima relazione rispetto a η , si ottiene:

$$\frac{dC^*_W}{d\eta} = -100 \cdot \frac{k \cdot h \cdot P}{i\%} \cdot \frac{1}{\eta^2}$$

da cui si vede che il secondo membro di questa relazione coincide appunto con il secondo termine del primo membro della relazione (3). Tenendo conto di ciò la (3) diventa:

$$\frac{dC_M}{d\eta} + \frac{dC^*{}_W}{d\eta} = 0$$

ovverosia (essendo la somma delle derivate uguale alla derivata della somma):

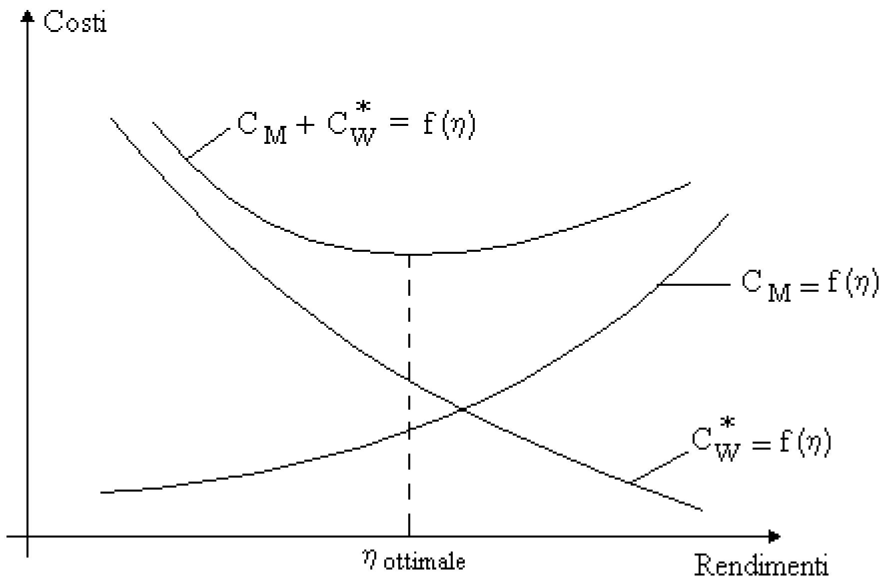
$$\frac{d}{d\eta}\left(C_M + C^*{}_W\right) = 0$$

Se ne deduce quindi che la condizione di rendimento ottimale ricercata può essere ottenuta mediante un calcolo di derivazione, e, più precisamente, calcolando e uguagliando a zero la derivata prima rispetto a η della funzione:

$$C_M + C^*{}_W = f(\eta)$$

cioè, in definitiva, mediante una ricerca di massimo o di minimo della funzione stessa.

Nel presente caso, come appare evidente dal grafico di seguito riportato, si tratta di una condizione di minimo.



Si può pertanto concludere che:

"**<u>Il rendimento ottimale è quello che rende minima la somma del costo della macchina C_m e del valore capitalizzato del costo delle perdite di energia $C^*{}_w$</u>**".

<u>ESEMPIO</u>

	Trasformatore 1	Trasformatore 2
Potenza	P_1 = 50 KVA	P_2 = 50 KVA
Rendimento	η_1 = 0,935	η_2 = 0,940
Costo	C_{M1} = £ 6.200.000	C_{M2} = £ 7.000.000

- Costo energia K = 200 £/Kwh
- Costo denaro i % = 10 %

- PERDITE

$$W_1 = P_1 \cdot \left(\frac{1}{\eta_1} - 1 \right) = 50 \cdot \left(\frac{1}{0,935} - 1 \right) = 3,476 \text{ KW}$$

$$W_2 = P_2 \cdot \left(\frac{1}{\eta_2} - 1 \right) = 50 \cdot \left(\frac{1}{0,940} - 1 \right) = 3,191 \text{ KW}$$

- AUMENTO DI COSTO DEL TRASFORMATORE

$$\Delta C_M = C_{M2} - C_{M1} = 7.000.000 - 6.200.000 = 800.000 \text{ lire}$$

1) CASO - h = 1.200 ore/anno

- Costo perdite

$$C_{W1} = K \cdot h \cdot W_1 = 200 \cdot 1200 \cdot 3,476 = 834.240 \text{ lire}$$

$$C_{W2} = K \cdot h \cdot W_2 = 200 \cdot 1200 \cdot 3,191 = 765.840 \text{ lire}$$

- Guadagno

$$g = C_{W1} - C_{W2} = 834.240 - 765.840 = 68.400 \text{ lire}$$

Se l'aumento di costo del trasformatore (£ 800.000), invece che essere utilizzata per comprare un trasformatore di rendimento più elevato, venisse investita ad un tasso i %, quanto renderebbe a fine anno?

$$g' = \frac{\Delta_{CM} \cdot i\%}{100} = \frac{800.000 \cdot 10}{100} = 80.000 \text{ lire}$$

Siccome g' > g (il guadagno ottenuto investendo la cifra è maggiore del risparmio ottenuto dalle minori perdite) conviene investire la cifra con un rendimento del 10 % e comprare il trasformatore con rendimento inferiore.

Lo stesso risultato si può ottenere con un altro tipo di ragionamento: qual'è quel capitale "X" che ad un tasso i % rende alla fine dell'anno la cifra g = £ 68.400 (la cifra così ottenuta si chiama "valore capitalizzato" di "g")?

da cui: $$\frac{X \cdot i\%}{100} = g$$

$$X = \frac{100 \cdot g}{i\%} = \frac{100 \cdot 68.400}{10} = 684.000 \text{ lire}$$

<u>Siccome X < ΔC_M</u> (684.000 < 800.000) <u>non conviene comprare il trasformatore con rendimento (e quindi costo) più elevato</u>.

In altre parole: non conviene investire sul trasformatore, ma in qualche altra forma con un rendimento del 10 %.

2) CASO - h = 1.600 ore/anno

– Costo delle perdite

$$C_{W1} = K \cdot h \cdot W_1 = 200 \cdot 1600 \cdot 3{,}476 = 1.112.320 \text{ lire}$$

$$C_{W2} = K \cdot h \cdot W_2 = 200 \cdot 1600 \cdot 3{,}191 = 1.021.120 \text{ lire}$$

– Guadagno

$$g = C_{W1} - C_{W2} = 1.112.320 - 1.021.120 = 91.200 \text{ lire}$$

– Valore capitalizzato di g

$$X = \frac{100 \cdot g}{i\%} = \frac{100 \cdot 91.200}{10} = 912.000 \text{ lire}$$

<u>Siccome X > ΔC_M</u> (912.000 > 800.000) <u>conviene comprare il trasformatore con rendimento (e quindi con costo) più elevato.</u>

<u>NOTA</u> L'operazione di capitalizzazione si rende necessaria quando si devono confrontare due cifre relative a periodi diversi: per esempio, a fronte di un certo aumento di spesa (da corrispondere subito) si ha un certo guadagno futuro (disponibile dopo un determinato periodo). "Capitalizzare" significa in definitiva calcolare a quale cifra "*attuale*" corrisponde un guadagno "*futuro*" ad un tasso d'interesse i %.
Nel caso dei trasformatori, ad un aumento di spesa "dC_M" immediata corrisponde un guadagno "g" alla fine di un determinato periodo, per esempio 1 anno.