VALORE PIÙ CONVENIENTE DEL RAPPORTO FRA IL PESO DEL RAME E IL PESO DEL FERRO

Il “ferro” e il “rame” sono i materiali “attivi” più importanti nella costruzione delle macchine elettriche.

I loro pesi non sono indipendenti uno dall’altro: ad un determinato peso del ferro corrisponde un ben determinato peso del rame. Se si cambia (naturalmente in fase di progettazione) l’uno (per esempio il ferro cambiando le dimensioni del nucleo) anche l’altro (il rame degli avvolgimenti) cambia. Il legame fra i due pesi è di tipo inverso: nel senso che ad un aumento dell’uno corrisponde una diminuzione dell’altro e viceversa.

Da ciò si può pertanto dedurre che, tenuto conto dei costi dei due materiali, esisterà una condizione di “*optimum*” del rapporto fra i loro pesi tale da dar luogo ad un costo complessivo (somma dei due) minimo.

È questo aspetto dell’ottimizzazione nella costruzione delle macchine elettriche che viene di seguito illustrato. Seppur di carattere generale, esso può essere applicato con maggiore attendibilità particolarmente per i trasformatori, per i quali il peso dei materiali attivi (ferro e rame) è percentualmente più elevato, rispetto al peso totale, di quello delle macchine rotanti.

Si consideri quindi un trasformatore di determinate caratteristiche (potenza, tensioni, frequenza, tipo) e si indichi con:

- G_{fe} = peso del ferro
- S_{fe} = sezione del ferro
- γ_{fe} = peso specifico del ferro
- C_{fe} = costo del ferro
- G_{cu} = peso del rame
- S_{cu} = sezione del rame
- γ_{cu} = peso specifico del rame
- C_{cu} = costo del rame

Si supponga di aumentare la sezione del nucleo del trasformatore e si indichi con “dx” l’aumento relativo delle dimensioni lineari della sezione (per esempio dei due lati se è di forma rettangolare o del raggio se è di forma circolare). Se “l” è una di tali dimensioni originarie, quella dopo l’aumento sarà “l·(1+dx)”.

Di conseguenza se S_{fe} è la sezione originaria del ferro, quella dopo l’aumento varrà:

$$S'_{fe} = (1 + dx)^2 \cdot S_{fe}$$

Rimanendo invariata la lunghezza l_{fe} del circuito magnetico, i pesi del ferro prima (G_{fe}) e dopo (G'_{fe}) l’aumento valgono:

$$G_{fe} = \gamma_{fe} \cdot l_{fe} \cdot S_{fe}$$

$$G'_{fe} = \gamma_{fe} \cdot l_{fe} \cdot S'_{fe} = \gamma_{fe} \cdot l_{fe} \cdot (1 + dx)^2 \cdot S_{fe} = (1 + dx)^2 \cdot G_{fe}$$

Da questa relazione si deduce che ad un aumento di sezione del ferro corrisponde un aumento del suo peso. La conseguente variazione del peso del ferro risulta:

$$dG_{fe} = G'_{fe} - G_{fe} = G_{fe} \cdot \left[(1+dx)^2 - 1\right] =$$

$$= G_{fe} \cdot \left(1 + 2 \cdot dx + dx^2 - 1\right) = 2 \cdot G_{fe} \cdot dx$$

avendo trascurato dx^2 rispetto a dx in quanto infinitesimo di ordine superiore.

Per quanto riguarda il nuovo peso del rame, conseguente ad un aumento della sezione del ferro, esso può essere calcolato nel seguente modo. Per prima cosa si calcola il numero delle spire del trasformatore prima (N) e dopo (N’) l’aumento della sezione del ferro che, rimanendo invariata l’induzione B_M, valgono:

$$N = \frac{E}{4{,}44 \cdot f \cdot B_M \cdot S_{fe}}$$

$$N' = \frac{E}{4{,}44 \cdot f \cdot B_M \cdot S'_{fe}} = \frac{E}{4{,}44 \cdot f \cdot B_M \cdot (1+dx)^2 \cdot S_{fe}} = \frac{N}{(1+dx)^2}$$

e quindi i corrispondenti pesi del rame prima (G_{cu}) e dopo (G'_{cu}) che, a parità di sezione del rame (cioè a parità di densità di corrente), risultano:

$$G_{cu} = \gamma_{cu} \cdot l_{cu} \cdot S_{cu} \cdot N$$

$$G'_{cu} = \gamma_{cu} \cdot l'_{cu} \cdot S_{cu} \cdot N' = \gamma_{cu} \cdot (1+dx) l_{cu} \cdot S_{cu} \cdot \frac{N}{(1+dx)^2} = \frac{G_{cu}}{(1+dx)}$$

Nel calcolo del peso del rame si deve tener presente che l’aumento di sezione del nucleo comporta anche un aumento della lunghezza delle spire dal momento che queste sono appunto avvolte intorno ad esso. La loro lunghezza passa allora da l_{cu} a $l_{cu}\cdot(1+dx)$.

La relazione precedente mette in evidenza che, ad un aumento del peso del ferro, corrisponde una diminuzione del peso del rame. La variazione di tale peso risulta:

$$dG_{cu} = G_{cu} - G'_{cu} = G_{cu} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+dx}\right) =$$

$$= G_{cu} \cdot \left(\frac{1 + dx - 1}{1+dx}\right) = G_{cu} \cdot dx$$

avendo, al denominatore, trascurato dx rispetto ad 1

Passando a considerare le conseguenti variazioni dei costi dC_{fe} e dC_{cu} dei due materiali si ha:

- Per il ferro un aumento di costo dovuto ad un aumento del peso ($G'_{fe} > G_{fe}$):

$$dC_{fe} = C_{fe} \cdot dG_{fe} = 2 \cdot C_{fe} \cdot G_{fe} \cdot dx$$

- Per il rame una diminuzione di costo dovuto ad una diminuzione del peso ($G_{cu} > G'_{cu}$):

$$dC_{cu} = C_{cu} \cdot dG_{cu} = C_{cu} \cdot G_{cu} \cdot dx$$

La condizione di "ottimo" si ha quando le due variazioni di costo si uguagliano:

$$dC_{cu} = dC_{fe}$$

$$C_{cu} \cdot G_{cu} \cdot dx = 2 \cdot C_{fe} \cdot G_{fe} \cdot dx$$

da cui:

$$\frac{G_{cu}}{G_{fe}} = 2 \cdot \frac{C_{fe}}{C_{cu}}$$

Pertanto si può concludere che:

"**Il rapporto più conveniente fra il peso del rame e il peso del ferro in un trasformatore è quello corrispondente al doppio del rapporto inverso dei rispettivi costi unitari dei due materiali attivi**"